



Ein vereinheitlichter nichtlinearer Ansatz zur Strukturanalyse von Balken- und Schalentragsystemen*

CRISTIAN GUILLERMO GEBHARDT

Geophysical Institute und Bergen Offshore Wind Centre (BOW), University of Bergen, Allégaten 70, 5007 Bergen, Norwegen (ab dem 1. April 2021)

1. Motivation

Gegenwärtige und zukünftige dynamisch beanspruchte, schlanke Strukturen aus mehrschichtig verbundenen, hyperelastischen Werkstoffen, z.B. Windenergieanlagen und Hubschrauber, sind sehr komplex. Eine genaue Untersuchung im Zeitbereich erfordert den Einsatz von Methoden, die kinematische, geometrische sowie, bis zu einem gewissen Grad, materielle Nichtlinearitäten berücksichtigen. Daher können Simulationen mit Beachtung von großen Verschiebungen, Drehungen und Verzerrungen nötig sein, um das mechanische Verhalten akkurat vorherzusagen. Zunächst werden die Bewegungsgleichungen räumlich diskretisiert. Dann werden die zum Teil diskretisierten Gleichungen mittels eines Integrationsverfahrens zeitlich diskretisiert. Solche diskreten Gleichungen sind sehr steif, sodass sich die Berechnung der langzeitigen Lösung erschwert. Darüber hinaus ist oft die Einführung von Nebenbedingungen nötig, um komplexere Strukturen aufstellen zu können, wodurch die Komplexität erhöht wird und unerwünschte Eigenschaften noch verschärft werden. Um Robustheit zu gewinnen, sollen Berechnungsverfahren hergeleitet werden, die die zugrunde liegende Physik in gewissem Maße erhalten und gleichzeitig den hochfrequenten Anteil der Lösung unterdrücken können. Die Erfüllung dieser Anforderungen stellt sich als sehr herausfordernd heraus.

Bezüglich der Abbildung des nichtlinearen materiellen Verhaltens bei schlanken Tragwerken stellt die datengetriebene Strukturanalyse ein neues Rechnungsparadigma dar, welches auf der Umformulierung des klassischen Randwertproblems im Rahmen der Strukturanalyse basiert, d.h. es handelt sich um eine Erweiterung bzw. eine Fortsetzung der Methoden, die zum Teil in dem ersten Absatz des vorliegenden Abschnittes eingeführt wurden. In diesem Zusammenhang werden phänomenologische konstitutive Stoffgesetze durch materielle Daten aus Experimenten im Labor ersetzt. In der Regel wird solche Information in der Form von Verformung-Spannung-Sätzen zur Verfügung gestellt, d.h. es geht um eine diskrete Darstellung im Phasenraum. Damit ist zu erwarten, dass sowohl die Fehler als auch die Ungenauigkeiten infolge der phänomenologischen Materialmodellierung vollständig eliminiert werden. Des Weiteren soll es damit gelingen, die sehr reiche Menge an Messdaten in einem Ganzen auszunutzen. In der gegenwärtigen Entwicklungsphase kann man grundsätzlich drei Ansätze unterscheiden: Ein *direkter* Ansatz, ein *inverser* Ansatz sowie ein *hybrider* Ansatz. Darüber hinaus existieren noch weitere, nicht in diese Klassifizierung passende Ansätze, die im Folgenden jedoch nicht weiter behandelt werden. Gleichzeitig entstehen neue Fehlerquellen daraus, die inhärent zu den Messungen sind, z.B. Verbreitung von Fehlern über die Messkette, Einschränkung der ausgewählten Messtechnik usw. In der Tat gibt es bisher kein Konsens in Bezug auf die Relevanz bzw. das Ausmaß der Einwirkung bei neuen Fehlerquellen gegenüber den vorhandenen Fehlerquellen bei herkömmlichen Berechnungsmethoden. Daher ist weitere Forschung in diese Richtung erforderlich.

*Der Vortrag wurde am 26. Juni 2020 vor der Klassensitzung Ingenieurwissenschaft der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft gehalten.



2. Mechanisches Rahmenwerk

Aus dem Sichtpunkt der Modellbildung stützt sich die vorliegende Arbeit auf zwei grundlegende Strukturmodelle, den geometrisch exakten Balken[†] (Gebhardt et al. 2019a sowie Gebhardt et al. 2019b) und die Kontinuumsmechanik-basierte Schale (Gebhardt und Rolfes 2017 sowie Gebhardt et al. 2019a). Zusätzlich soll der Starrkörper nicht ausgelassen werden, da ein solches Modell sehr reich an kinematischen Konzepten ist (Gebhardt et al. 2019a). Obwohl die Modellbildung dieser drei Idealisierungen ein klassisches Thema ist, ist eine vereinheitlichte Behandlung bzw. eine konsistente Kombination innerhalb eines einzigen Rahmenwerkes alles anders als eine triviale Aufgabe, da sehr unterschiedliche kinematische Beschreibungen gleichzeitig zu betrachten sind. Sowohl für den Starrkörper als auch für den geometrisch exakten Balken wird die Ausrichtung im Umgebungsraum mit Hilfe der Lieschen Gruppe

$$SO(3) := \{R \in \mathbb{R}^{3 \times 3} | R^T R = I, \det(R) = 1\}$$

beschrieben, wobei der Rotationstensor als R gekennzeichnet ist. Im Gegensatz dazu erfordert die kinematische Beschreibung der Kontinuumsmechanik-basierte Schale, die 2-Sphäre zu berücksichtigen, nämlich

$$S^2 := \{d \in \mathbb{R}^3 | d \cdot d = 1\},$$

wobei der Direktor als d gekennzeichnet ist. Diese glatte Mannigfaltigkeit verfügt über keine weitere algebraische Struktur, wie z.B. die Gruppenstruktur. Dies bedeutet, dass unterschiedliche partikuläre Behandlungen erforderlich sind. Durch die kinematischen Ähnlichkeiten kann eine systematische Beschreibung des Starrkörpers und des geometrisch exakten Balkens erfolgen. Allerdings erfordert eine Kombination solcher Modelle mit dem Schalenmodell eine maßgeschneiderte Strategie (Gebhardt et al. 2019a).

Gegeben sei ein mechanisches System mit dem Konfigurationsvektorfeld $x(t) \in X \subseteq \mathbb{R}^3$, dem Geschwindigkeitsvektorfeld $v(t) \in V \subseteq \mathbb{R}^3$, der zeitunabhängigen integrierbaren Zwangsbedingung $h(x) = 0 \in \mathbb{R}^n$ und ihrer Jacobi-Matrix $H(x) \in L(\mathbb{R}^n, X)$. Das dynamische Verhalten des Systems lässt sich zum Zeitpunkt $t \in T \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ durch

$$\int_{\mathcal{B}_0} (\langle \delta v, \pi(v) - p(\dot{x}) \rangle + \langle \delta x, \dot{\pi}(v) + f(x) + H(x)^T \lambda \rangle + \langle \delta \lambda, h(x) \rangle) d\mathcal{B}_0 = 0$$

beschreiben, wobei das Integral über den Referenzbereich \mathcal{B}_0 berechnet wird und alle zulässigen Konfigurationen durch die glatte reguläre Bewegung $\varphi_t \circ \varphi_0^{-1}: \mathcal{B}_0 \mapsto \mathcal{B}_t$ bestimmt werden. Das duale Produkt ist durch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ angegeben und $\pi(v)$ bzw. $p(v)$ stellt den Geschwindigkeit-basierten Impuls bzw. den Konfiguration-basierten Impuls dar. Des Weiteren steht $f(x)$ für die Summe der inneren und äußeren Kraftfelder, $\lambda: \mathcal{B}_0 \times T \rightarrow \mathbb{R}^n$ repräsentiert die Lagrange-Multiplikatoren und $\delta(\cdot)$ stellt eine zulässige Variation eines gegebenen Felds dar. Diese Beschreibung ermöglicht die unmittelbare Einführung von Dissipationsfunktionen sowie nicht-integrierbaren Einschränkungen, welche sich auf Geschwindigkeitsebene auf eine sehr natürliche Art und Weise formulieren lassen, aber nicht auf Impulsebene, wie bei anderen klassischen Formulierungen, z.B. den auf dem Konfiguration-Impuls basierenden Formulierungen. Für den

[†]Vorwölbung infolge der Verdrehung bzw. der Schubverformung des Querschnittes wird hier nicht berücksichtigt (Gebhardt et al. 2018).



allgemeinen nicht-konservativen Fall können die resultierenden Gleichungen auf die nicht-variationellen Lagrange-D'Alembert-Gleichungen zurückgeführt werden (Gebhardt und Romero 2020d). Für den konservativen Fall können die resultierenden Gleichungen auf die vollständig variationellen Euler-Lagrange-Gleichungen zurückgeführt werden. Aufgrund der allgemeinen Anwendbarkeit wurde dieses mechanische Rahmenwerk gewählt. Diese Formulierung kann jeweils für unterschiedliche Idealisierungen spezialisiert werden, z.B. für den Starrkörper (siehe Abb. 1), für den geometrisch exakten Balken (siehe Abb. 2) sowie für die Kontinuumsmechanik-basierte Schale (siehe Abb. 3). Nach der Wahl von geeigneten Verformungsmaßen bzw. Verformungsraten ist die Erhaltung des Impulses und des Dralles genau gewährleistet. Für den exakten konservativen Fall wird ebenfalls die Zeit-Invarianz durch die Erhaltung der Energie nachgewiesen.

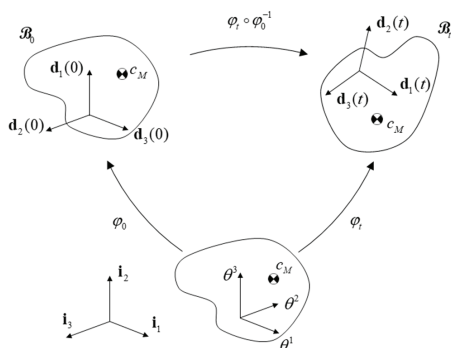


Abb. 1. Das Starrkörpermodell

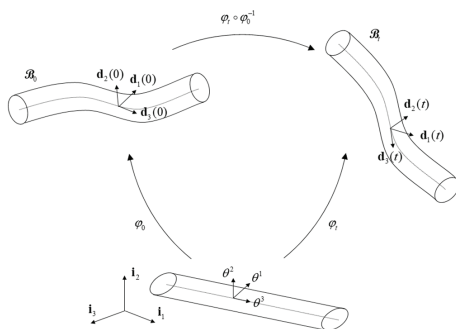


Abb. 2. Das geometrisch exakte Balkenmodell

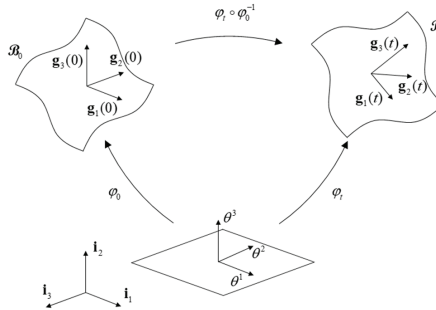


Abb. 3. Das Kontinuumsmechanik-basierte Schalenmodell

3. Robuste Zeitintegration

Bei der dynamischen Analyse nichtlinearer schlanker Tragwerke tritt typischerweise der Bedarf an konservativen bzw. dissipativen Zeitintegrationsschemata zur Lösung der Bewegungsgleichungen auf. In diesem Zusammenhang wird eine neuartige Methodenklasse, die konstruktionsbedingt Schemata mit den gewünschten Erhaltungs- und Dissipationseigenschaften liefert, vorgeschlagen. Diese Methodenklasse diskretisiert zeitlich die Bewegungsgleichungen, fügt einige Störungen hinzu, die sich auf die primalen Variablen beziehen, und lässt sich als eine Kollektion linearer quadratischer zusätzlicher Optimierungsprobleme beschreiben, deren Lösungen die erwünschten Erhaltungs- und Dissipationseigenschaften gewährleisten. Diese Art von Optimierungsproblemen ist analytisch lösbar und ist daher aus rechnerischer Sicht sehr attraktiv. Eine mögliche Interpretation ist, dass dies zu konservativen und/oder dissipativen Methoden führt, bei denen die geometrischen Argumente, die typischerweise für ihren Entwurf verwendet werden, durch lokale Optimalitätsbedingungen ersetzt wurden (Gebhardt et al. 2020a).

Das diskrete Integrationsschema zum mittleren Zeitpunkt lautet dann

$$\begin{aligned} & \langle \delta s_{n+\frac{1}{2}}, \pi_d(s_n, s_{n+1}) - p_d(q_n, q_{n+1}) \rangle \\ & + \langle \delta q_{n+\frac{1}{2}}, \tilde{\pi}_d(s_n, s_{n+1}) + f_d(q_n, q_{n+1}) + H_d(q_n, q_{n+1})^T \lambda_{n+\frac{1}{2}} \rangle \\ & + \langle \delta \lambda_{n+1}, h(q_{n+1}) \rangle = 0 \end{aligned}$$

wobei (q, s) den diskreten Zustand des Systems beschreibt, d.h. verallgemeinerte Lage und Geschwindigkeit, und der Unterindex d für „diskret“ steht. Der Unterindex n referenziert zum vorherigen Zeitpunkt, zu welchem die Lösung bekannt ist, und der Unterindex $n+1$ referenziert zum nächsten Zeitpunkt, zu welchem die Lösung zu finden ist. Durch die in den neuen Methoden vorgeschlagenen Störungen zu den Gliedern $\pi_d(s_n, s_{n+1})$ und $f_d(q_n, q_{n+1})$ sollen einige der unerwünschten Effekte korrigiert werden, die sich aus der direkten Diskretisierung der maßgeblichen Gleichungen ergeben. Aus einem geometrischen Sichtpunkt besteht die Idee darin, das Problem so umzugestalten, dass das Verhalten des Systems auf der diskreten beschränkten Teilmannigfaltigkeit unverändert bleibt, aber diese als Attraktor für Trajektorien außerhalb invarianter Teilmannigfaltigkeit einwirken soll. Da die eingeschränkten Optimierungsprobleme in geschlossener Form gelöst werden können, können korrigierte Formeln für



die algorithmischen Kraftgrößen sowie für die verallgemeinerten Geschwindigkeiten bereitgestellt und somit unmittelbar in vorhandene Simulationscodes aufgenommen werden. Explizite Formeln zu den Gliedern $\pi_d(s_n, s_{n+1})$ und $f_d(q_n, q_{n+1})$ sind

$$s_d(s_n, s_{n+1}) = \left(1 + \frac{D_s(s_n, s_{n+1})}{T(s_{n+1}) - T(s_n)}\right) \left(\frac{s_n + s_{n+1}}{2}\right),$$

und

$$f_d(q_n, q_{n+1}) = \frac{f(q_n) + f(q_{n+1})}{2} + \frac{C(q_n, q_{n+1}) + D_f(q_n, q_{n+1})}{\langle f(q_{n+1}) - f(q_n), q_{n+1} - q_n \rangle} (f(q_{n+1}) - f(q_n)).$$

Sowohl die kinetische Energie T als auch die potentielle Energie V zu den Zeitpunkten n und $n + 1$ sollen ermittelt werden. Des Weiteren müssen die Konservationsfunktion $C(q_n, q_{n+1})$ (Funktion der potentiellen Energie) sowie die Dissipationsfunktionen $D_f(q_n, q_{n+1})$ und $D_s(s_n, s_{n+1})$ so gewählt werden, dass die thermomechanische Konsistenz unbedingt gewährleistet wird.

Um die exzellenten Eigenschaften bei der Kurzzeit-Dynamik des hier angewandten Integrationsverfahrens nachzuweisen, werden Ergebnisse für ein fliegendes Lineal in Abb. 4 (oben) dargestellt. Die geometrischen und materiellen Eigenschaften sind die folgenden: Länge 0,3 m, Breite 0,06 m, Dicke 0,002 m, erster Lamé-Parameter 0,0 Pa, zweiter Lamé-Parameter 103,0 GPa und Massendichte pro Volumeneinheit 7.300 kg/m³. Für das Stoffgesetz wird das neo-Hooke'sche hyperelastische Modell angenommen. Dissipative Schemata wären von geringem Interesse, wenn die Energiedissipation nicht hauptsächlich im Hochfrequenzbereich stattfinden würde. Es ist wohl bekannt, dass die Dissipation der hohen Frequenzen zu einer verbesserten Stabilität für die Integration steifer Differentialgleichungen zuführt. Es kann daher gesagt werden, dass die einzigen nützlichen dissipativen Schemata diejenigen sind, die den Hochfrequenzanteil der dynamischen Antwort unterdrücken können, ohne den Niederfrequenzanteil der dynamischen Antwort radikal zu verändern.

Abb. 4 (unten) **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.** zeigt das Amplitudenspektrum basierend auf der schnellen Fourier-Transformation der kinetischen und potentiellen Energien sowohl für den konservativen als auch für den dissipativen Fall im Zeitbereich von 0,06 s bis 0,1 s, sodass der direkte Einfluss des anfänglichen Übergangs vermieden wird. Dies entspricht dem Frequenzbereich 100–2000 Hz und dem Energiebereich 0–20 J. Für den dissipativen Fall wird ein homogener Dissipationsbeiwert 0,5 sowohl für die algorithmische Geschwindigkeit als auch für die algorithmische Kraft eingesetzt. Es ist klar ersichtlich, dass der dissipative Algorithmus über 600 Hz hinaus sehr effektiv ist. Bis zu 600 Hz ähnelt das Verhalten für die konservativen und dissipativen. Es kann daher behauptet werden, dass das vorgeschlagene Schema sehr vielversprechende Dissipationseigenschaften aufweist.

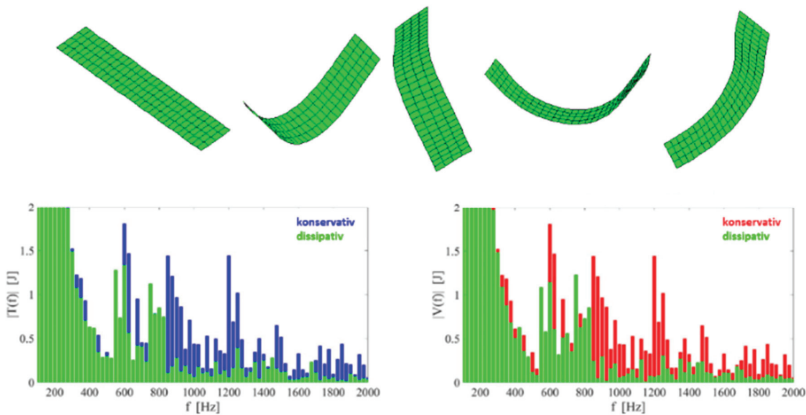


Abb. 4. Effektivität des dissipativen Schemas – kinetische Energie (links) und potentielle Energie (rechts).

Um die exzellenten Eigenschaften bei der Langzeit-Dynamik des hier angewandten Integrationsverfahrens nachzuweisen, werden in mehrere Poincaré-Abbildungen eines Doppelpendels unter dem Einfluss der Schwerkraft bei unterschiedlichen Anfangsbedingungen dargestellt. Die zwei konzentrierten Massen betragen jede 1 kg, die zwei masselosen Stangen sind 1 m lang und die Beschleunigung infolge der Schwerkraft beträgt $9,82 \text{ m/s}^2$. Die Simulationszeit ist 75.000 s und ein Zeitschritt von 0,05 s wird angenommen. Um eine pseudo-periodische Bewegung zu erzeugen, wird der Winkel der oberen Stange als 0,826735 rad berücksichtigt. Mittlerweile werden die restlichen Anfangswerte gleich null angenommen. Im Gegensatz wird der Wert 1,25664 rad für die obere Stange betrachtet, um eine chaotische Bewegung zu erzeugen. Zur richtigen Erfassung der nichtlinearen Dynamik ist die exakte Erhaltung der Energie erforderlich, da eine tatsächliche konstante Energie die Reduktion von vier abhängigen Zustandsvariablen auf drei unabhängige Zustandsvariable ermöglicht. Letztlich werden die sogenannten Poincaré-Schnitte durch die Fixierung einer der drei übrigen unabhängigen Zustandsvariablen vollständig definiert. Nun sollen die Schnittmenge-Stellen identifiziert werden, an die die Trajektorien des Systems einen oder anderen Poincaré-Schnitt treffen. Grob gesagt, wird es sich um eine periodische Bewegung handeln, wenn sich die Schnittmenge-Stellen durch eine endliche Anzahl von Punkten beschreiben lassen. Bei pseudo-periodischen Bewegungen werden sich die Schnittmenge-Stellen als kontinuierliche Kurven zeigen. Im Falle einer chaotischen Bewegung werden die Schnittmenge-Stellen als eine Streuung von Punkten innerhalb eines wohl-definierten Bereiches in Erscheinung treten. In Abb. 5 ist sofort identifizierbar, dass es sich um pseudo-periodische und chaotische Bewegungen handelt.

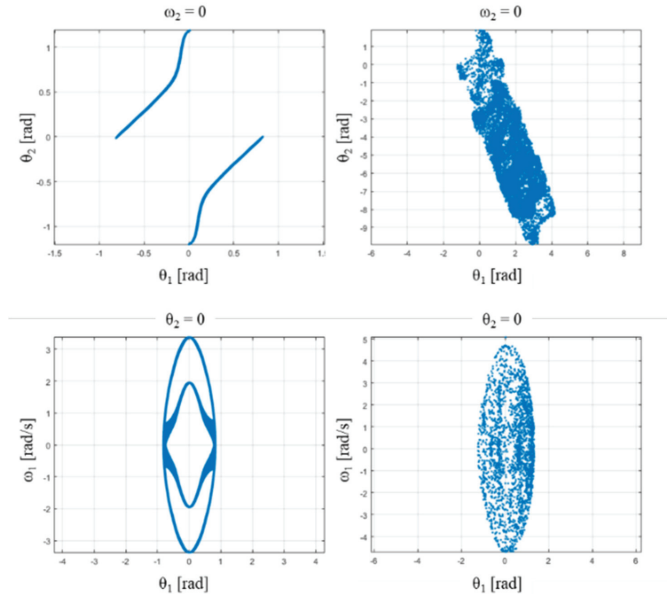


Abb. 5. Poincaré-Abbildungen für das Doppelpendel bei unterschiedlichen Anfangsbedingungen - pseudo-periodische Bewegung (links) und chaotische Bewegung (rechts).

4. Datengetriebene Strukturanalyse

Der *direkte* Ansatz, der *inverse* Ansatz sowie der *hybride* Ansatz zu datengetriebener Strukturanalyse werden nachfolgend kurz beschrieben (Gebhardt et al. 2020b sowie Gebhardt et al. 2020c). Des Weiteren wird durch ein eindimensionales Beispiel gezeigt, wie sich der zugrundeliegende Rechengang beim *direkten* Ansatz ausführen lässt. Es wird ebenfalls klargestellt, welche wichtige Aspekte sorgfältig betrachtet werden sollen. Endlich wird mit Hilfe des *hybriden* Ansatzes gezeigt, wie ein komplizierteres Problem erforscht werden kann.

Direkter Ansatz: Die erste Methodenklasse folgt einem *direkten* datengetriebenen Ansatz. Darin wird es angestrebt, jedem Materialpunkt einen Punkt im Phasenraum zuzuweisen, wobei der Phasenraum ein Raum mit einer geraden Anzahl von Dimensionen ist. Daher ist eine Trennung in zwei gleichgroße Koordinatensätze, nämlich die Komponenten des zweifach-kontravarianten Verzerrungstensors und die Komponenten des zweifach-kovarianten Spannungstensors, möglich. Diese Zuweisung soll die Kompatibilitätsbedingungen und das Gleichgewicht erfüllen und zusätzlich eine Art abstrakter Distanz zu den Messdaten minimieren. Die entsprechende Formulierung zu dieser Aufgabe hat die Form eines diskret-kontinuierlichen Optimierungsproblems, welches die Distanz im Phasenraum zwischen den Messdaten und den zulässigen Verzerrungs- und Spannungsfeldern minimiert. Die zurzeit angewandten Methoden, die auf dem diskret-kontinuierlichen Optimierungsproblem basieren, sind infolge ihrer NP-Härter sehr zeitaufwendig und infolge ihrer Empfindlichkeit zur Datenunschärfe von mangelhafter Robustheit.

Inverser Ansatz: Die zweite Methodenklasse folgt einem inversen datengetriebenen Ansatz. Damit wird es angestrebt, ein lokales bzw. globales konstitutives Stoffgesetz mit Hilfe des



Mannigfaltigkeitslernens zu rekonstruieren. Im Falle der perfekten Elastizität ist das Ziel, eine Approximation für das Funktional der Energiedichte aus den Messdaten zu identifizieren, welche die erste bzw. zweite Ableitung den Spannungstensor bzw. die elastische Tangente bestimmt. Diese Vorgehensweise versucht immer, das lokale lineare Verhalten abzubilden. Falls dies nicht zu einer konvergenten Lösung führt, wird nach der Schnittmenge zwischen dem konstitutiven Stoffgesetz und der Gleichgewichtsmannigfaltigkeit gesucht. Obwohl dieser Ansatz viele Vorteile aufweist, wie z.B. die Gewährleistung der thermomechanischen Konsistenz und die Möglichkeit zur nicht-intrusiven Umsetzung, ist er auch mit einigen Nachteilen behaftet, so wird beispielsweise die Existenz einer funktionalen Struktur der Energiedichte vorausgesetzt, welche zu expliziten Definitionen der Spannung eingeschränkt wird,

Hybrider Ansatz: Die dritte Methodenklasse folgt einem hybriden datengetriebenen Ansatz, welcher auf einem approximierenden glatten Optimierungsproblem basiert. Dies kombiniert mehrere Stärken der *direkten* und *inversen* Ansätze und eliminiert gleichzeitig mehrere ihrer Schwächen. Auf der einen Seite erhöht er deutlich die Recheneffizienz und die Robustheit verglichen mit dem diskret-kontinuierlichen Optimierungsansatz der ersten Methodenklasse. Im Besonderen kann der approximierende nichtlineare Ansatz durch Sequentielle Quadratische Programmierung lokalerweise gelöst werden, womit der Bedarf an exotischen und unzuverlässigen meta-heuristischen Methoden vermieden wird. Es ist wohl bekannt, dass die auf Gradienten basierenden Methoden sehr reif sind und über sehr solide mathematische Grundlagen verfügen. Auf der anderen Seite spielt die Existenz einer funktionalen Struktur wie die Energiedichte keine Rolle, diese ist sogar völlig unnötig. Zusätzlich zu diesen Vorteilen ist die Einführung von kinematischen Nebenbedingungen sowie die Abbildung von implizit-definierten Verformungs-Spannungs-Zusammenhängen direkt und unkompliziert. Dies erweitert den Anwendungsbereich des Materialverhaltens, das adressiert werden kann, und kann auch als Überbrückung zu den wahren modellfreien datengetriebenen Methoden berücksichtigt werden.

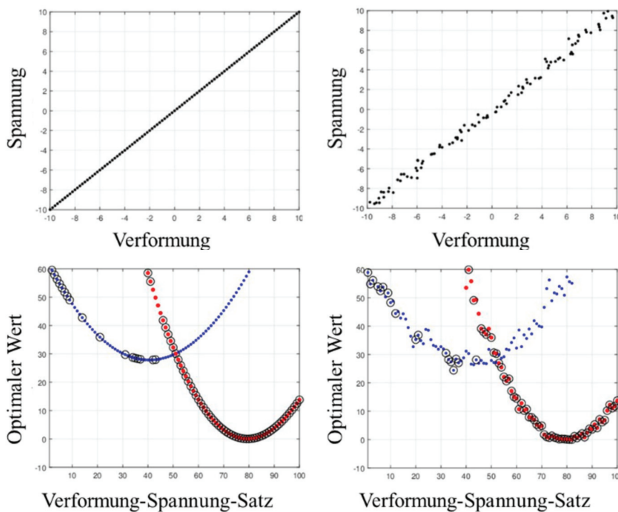


Abb. 6. Einzelner datengetriebener Dehnstab - künstlich gesampelte Materialdaten (links) und künstlich gesampelte Materialdaten mit 10% Rauschen (rechts).



Abb. 6 zeigt für einen einzelnen datengetriebenen Dehnstab, welcher an einem Ende fest gelagert ist und am verschieblichen Ende durch eine konzentrierte Last herausgezogen wird, wie der *direkte* Ansatz funktioniert. Zu diesem Zweck wird ein lineares Materialgesetz betrachtet. Oben auf der linken Seite sind künstliche gesampelte Materialdaten zu finden. Daneben sind die gleichen Materialdaten mit einem Rauschen von 10 % zu finden. Für jeden festen Verformung-Spannung-Satz wird ein kontinuierliches nichtlineares Optimierungsproblem lokalerweise mit Hilfe der Sequentiellen Quadratischen Programmierung gelöst, d.h. Anwendung des Newton-Raphson-Verfahrens mit Vollschrift über die Optimalitätsbedingungen erster Ordnung. Unten werden die entsprechenden optimalen Werte der Zielfunktion für die zwei Fälle skizziert. Mit schwarzen Kreisen werden die Lösungen gezeigt, die vom Nullzustand initialisiert wurden. Mit blauen Punkten werden die Lösungen gezeigt, die mit Warmstart aufsteigender Ordnung initialisiert wurden, nämlich vom Verformung-Spannung-Satz Nummer 1 bis Nummer 101. Mit roten Punkten werden die Lösungen gezeigt, die mit Warmstart absteigender Ordnung initialisiert wurden, nämlich vom Verformung-Spannung-Satz Nummer 101 bis Nummer 1. Die warm initialisierten Simulationen erweisen deutlich die Existenz von zwei Minimierern der Distanz, einem lokalen (blaue Punkte) und einem globalen (rote Punkte). Im Gegensatz konvergieren die kalt gestarteten Simulationen nicht immer zu einem Minimierer. Darüber hinaus konvergieren diese manchmal zu einem lokalen Minimierer und manchmal zu einem globalen Minimierer. Dieses stark vereinfachte Beispiel bestätigt die Schwierigkeiten bei der Lösung des exakten diskret-kontinuierlichen nichtlinearen Optimierungsproblem mit unverarbeiteten Materialdaten und die Notwendigkeit robuster Berechnungsverfahren für datengetriebenes Rechnen. Insbesondere lässt sich durch die Hinzufügung von Rauschen veranschaulichen, wie die Unschärfe der Materialdaten das Problem erschwert.

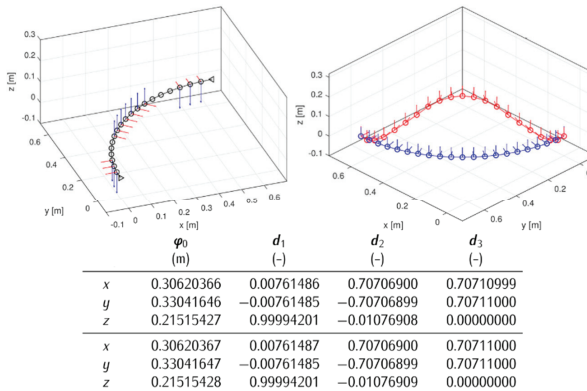


Abb. 7. Datengetriebene Balkenstruktur (oben) - Geometriedefinition, Randbedingungen und Belastung (links) und originale und verformte Konfigurationen (rechts). Verifikation gegenüber Standard-FEM (unten) am Zentralknoten - Die ersten drei Zeilen entsprechen der Standard-FEM und die letzten drei Zeilen entsprechen dem hybriden Ansatz.

Abb. 7 fasst die Verifikation des *hybriden* Ansatzes am Beispiel einer einfachen Balkenstruktur zusammen. Die Struktur ist ein Viertel eines Kreisbogens, der an beiden Enden fest eingespannt ist, siehe oben links. Die Länge des Kreisbogens ist 1 m, welche zu einem Halbdurchmesser von $0,5\pi$ m korrespondiert und in 20 Elemente diskretisiert wurde. An den Knoten 2-4 werden



konzentrierte Lasten von $(-10; 0; -20)$ N aufgebracht. Die Knoten 8-14 werden durch konzentrierte Lasten von $(7,5; -7,5; 15)$ N belastet. An den Knoten 18-20 werden konzentrierte Lasten von $(0; 10; -20)$ N aufgebracht. Zu Vergleichszwecken wurde das einfachste lineare Stoffgesetz betrachtet, d.h. $g(e, s)_j^i = \hat{a}_{ij}^{ikl} e_{kl} + \check{a}_{jkl}^i s^{kl} = 0$, wobei e bzw. s für den Verformungs- bzw. Spannungstensor steht und \hat{a}_{ij}^{ikl} sowie \check{a}_{jkl}^i anpassbare Koeffizienten sind. Damit wird gezeigt, dass der *hybride* Ansatz zu der erwarteten Lösung konvergiert. Die Referenzlösung wird mit der Standard-FEM berechnet. Oben rechts sind die originale Konfiguration sowie die verformte Konfiguration zu finden, wobei die geometrischen Nichtlinearitäten beim verformten Zustand erkennbar sind. Unten werden die Ergebnisse an den Zentralknoten der Struktur tabellarisch dargestellt. Sowohl die Lage als auch die Direktoren sind bei den zwei Methoden praktisch identisch und beide Methoden brauchten fünf Iterationen, um eine relative Fehlertoleranz von 10^{-12} zu erreichen.

5. Abschluss

In diesem Beitrag wurde die nichtlineare Strukturanalyse von Balken- und Schalentragwerken thematisiert. Durch eine auf Direktoren basierende Formulierung wurde ein vereinheitlichter nichtlinearer Ansatz vorgeschlagen, welcher zu einer reibungslosen Zusammenführung von Starrkörpern, Balken und Schalen ermöglicht hat. Diese Formulierung wurde erweitert in Richtung der strukturerhaltenden Zeitintegration, welche durch exzellente numerische und physikalische Eigenschaften geprägt ist. Zum Schluss wurde auch in diesem Zusammenhang das neue Rechenparadigma zur datengetriebenen Strukturanalyse vorgestellt. Obwohl dies eine solide Basis darstellt, muss immer noch weitere Forschung vorangetrieben werden, um zu zeigen, wie diese neuartigen Methoden im Rahmen von praxisrelevanten Fällen, wie z.B. Flugzeuge, Windenergieanlagen und Brücken, vorteilhaft angewandt werden können.

Literatur

- GEGBHARDT, C.G., ROLFES, R. (2017): On the nonlinear dynamics of shell structures: combining a mixed finite element formulation and a robust integration scheme – *Thin-Walled Structures* **118**:56-72.
- GEGBHARDT, C.G., MATUSEVICH, A.E., INAUDI, J.A. (2018): Coupled transverse and axial vibrations including warping effect in asymmetric short beams – *Journal of Engineering Mechanics* **144**:04018043.
- GEGBHARDT, C.G., HOFMEISTER, B., HENTE, C., ROLFES, R. (2019a): Nonlinear dynamics of slender structures: a new object-oriented framework – *Computational Mechanics* **63**:219-252.
- GEGBHARDT, C.G., STEINBACH, M.C., ROLFES, R. (2019b): Understanding the nonlinear dynamics of beam structures: a principal geodesic analysis approach – *Thin-Walled Structures* **140**:357-372.
- GEGBHARDT, C.G., ROMERO, I., ROLFES, R. (2020a): A new conservative/dissipative time integration scheme for nonlinear mechanical systems – *Computational Mechanics* **65**:405-427.
- GEGBHARDT, C.G., SCHILLINGER, D., STEINBACH, M.C., ROLFES, R. (2020b): A framework for data-driven structural analysis in general elasticity based on nonlinear optimization: the static case – *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **365**:112993.
- GEGBHARDT, C.G., STEINBACH, M.C., SCHILLINGER, D., ROLFES, R. (2020c): A framework for data-driven structural analysis in general elasticity based on nonlinear optimization: the dynamic case – *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **121**:5447-5468.
- GEGBHARDT, C.G., ROMERO, I. (2020d): The rotating rigid body model based on a non-twisting frame – *Journal of Nonlinear Science* **30**:3199-3233.